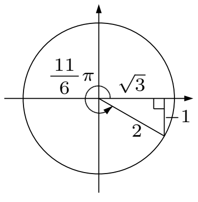
§3 三角関数

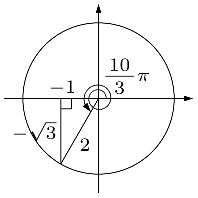
1.

(1) $\theta = \frac{11}{6}\pi$



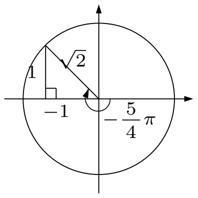
$$\begin{cases} \sin \frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

(2) $\theta = \frac{10}{3}\pi$



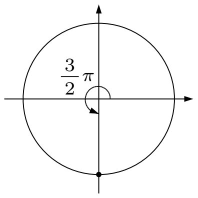
$$\begin{cases} \sin \frac{10}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2} \\ \tan \frac{10}{3}\pi = \sqrt{3} \end{cases}$$

(3) $\theta = -\frac{5}{4}\pi$



$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = -1 \end{cases}$$

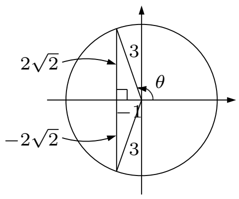
(4) $\theta = \frac{3}{2}\pi$



$$\begin{cases} \sin \frac{3}{2}\pi = -1 \\ \cos \frac{3}{2}\pi = 0 \\ \tan \frac{3}{2}\pi \quad \text{なし} \end{cases}$$

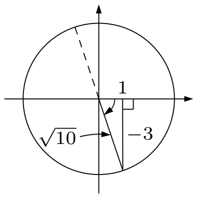
2.

(1) $\cos\theta = -\frac{1}{3}$



$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \tan\theta = -2\sqrt{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \tan\theta = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

(2) $\tan\theta = -3 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$



$$\begin{cases} \sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

3.

(1) $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$ の両辺を２乗すると

$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$-2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

(2) $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ をまず求める

$= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 + 2\cdot\frac{3}{8} = \frac{7}{4}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

♣ ここで $\sin\theta + \cos\theta$ の符号を考える

$\pi < \theta < 2\pi$ なので $\sin\theta < 0$

また (1) の結果より $\sin\theta\cos\theta > 0$ なので $\cos\theta < 0$

よって $\sin\theta + \cos\theta < 0$ である

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

(3) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

$= (\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16}$

(4) $\tan^2\theta - \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$= \frac{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$= \frac{1\cdot(\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$= \frac{-\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = -\frac{16\sqrt{7}}{9}$

4.

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ をまず求める。

$= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ より $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$ であるから

$\sin\theta + \cos\theta < 0$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{3}$ ……①

(2) まず $\sin\theta - \cos\theta$ を求める

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……②

①, ②を連立して

$(\sin\theta,\ \cos\theta) =$

$\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}\right)$

5.

(1) $\cos\theta = \tan\theta$

$\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cos^2\theta = \sin\theta$

$1 - \sin^2\theta = \sin\theta$

$\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0 \qquad \therefore \sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より $\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

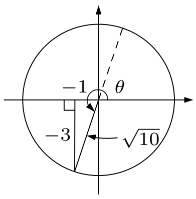
(2) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$

$\sin\theta+\cos\theta=2(\sin\theta-\cos\theta)$

$\sin\theta=3\cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=3$

$\therefore \tan\theta=3 \quad \pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ に注意して



$\therefore \boldsymbol{\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

♡ 別解　$\sin\theta=3\cos\theta$ の続きから

$\sin\theta=3\cos\theta$ より $\sin^2\theta=9\cos^2\theta$

$1-\cos^2\theta=9\cos^2\theta$

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

ここで $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ より $\sin\theta<0$

$\sin\theta=3\cos\theta$ より $\cos\theta<0$ なので $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(3) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

ここで $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$3^2+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta} \quad \therefore \dfrac{1}{\cos^2\theta}=10$ を代入して

与式 $=2\cdot 10=\underline{\underline{\mathbf{20}}}$

♡ 別解

$\tan\theta=3$ より $\sin\theta=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

これを与式に代入して計算すれば求まる

(4)(右辺)$=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$=\dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} \quad \longleftarrow \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を代入した

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=$(左辺)

よって等式 $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ は成り立つ（証終）

6.

(1) $\sin(-\theta)+\cos(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)$

$+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(4\pi-\theta)$

$=-\sin\theta-\cos\theta-\cos\theta+\cos\theta-(-\sin\theta)+\cos(-\theta)$

$=-\cos\theta+\cos\theta=\underline{\underline{\mathbf{0}}}$

(2) $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos(\theta-\pi)-\cos\left(\theta-\dfrac{3}{2}\pi\right)\sin(\theta-2\pi)$

$+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\tan(\pi-\theta)$

$=-\cos\theta(-\cos\theta)-(-\sin\theta)\sin\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}(-\tan\theta)$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+1=\underline{\underline{\mathbf{2}}}$

(3) $\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ のとき

$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta$

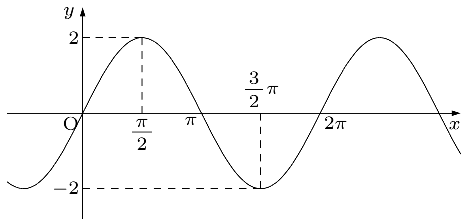
$=\sin\dfrac{2}{5}\pi+\sin\dfrac{4}{5}\pi+\sin\dfrac{6}{5}\pi+\sin\dfrac{8}{5}\pi$

$=\sin\dfrac{2}{5}\pi+\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{5}\right)+\sin\left(2\pi-\dfrac{2}{5}\pi\right)$

$=\sin\dfrac{2}{5}\pi+\sin\dfrac{\pi}{5}-\sin\dfrac{\pi}{5}-\sin\dfrac{2}{5}\pi=\underline{\underline{\mathbf{0}}}$

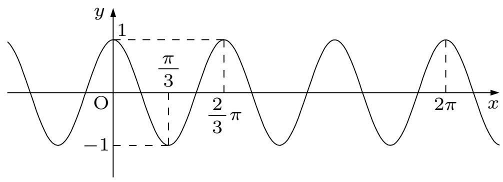
7.

(1) $y=2\sin x$ 　周期 2π



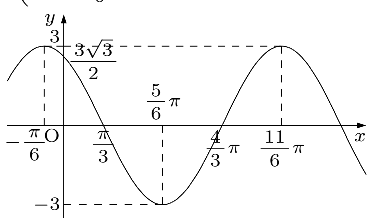
(2) $y=\cos 3x$

$3x=2\pi \quad \therefore x=\dfrac{2}{3}\pi$ より周期 $\dfrac{2}{3}\pi$



(3) $y=3\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 　周期 2π

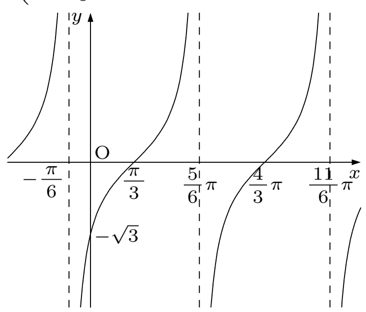
$\left(x=-\dfrac{\pi}{6}\right.$ のとき $y=3\cos 0=3$ をもとに書ける$\left.\right)$



$\left(\begin{array}{l} y=3\cos x \text{ のグラフを} \\ x \text{ 軸方向に } -\dfrac{\pi}{6} \text{ だけ平行移動したグラフと読み取れる} \end{array}\right)$

(4) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 　周期 π

$\left(x=\dfrac{\pi}{3}\right.$ のとき $y=\tan 0=0$ をもとに書ける$\left.\right)$

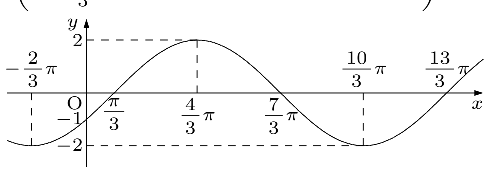


$\left(\begin{array}{l} y=\tan x \text{ のグラフを} \\ x \text{ 軸方向に} \dfrac{\pi}{3} \text{ だけ平行移動したグラフ} \end{array}\right)$

(5) $y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\dfrac{x}{2}=2\pi \quad \therefore x=4\pi$ より周期 4π

$\left(x=\dfrac{\pi}{3}\right.$ のとき $y=2\sin 0=0$ をもとに書ける$\left.\right)$



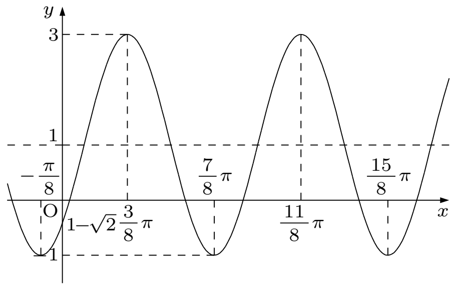
$\left(\begin{array}{l} y=2\sin\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) \text{ と変形すると} \\ y=2\sin\dfrac{x}{2} \text{ のグラフを} \\ x \text{ 軸方向に} \dfrac{\pi}{3} \text{ だけ平行移動したグラフと読み取れる} \end{array}\right)$

(6)　$y=-2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

$2x=2\pi$　$\therefore x=\pi$より周期π

$y=1$ の上下に波ができる

$\left(x=-\dfrac{\pi}{8}\text{のとき } y=-2\cos 0+1=-1 \text{ をもとに書ける}\right)$



$\left(\begin{array}{l} y=-2\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)+1 \text{ と変形すると} \\ y=-2\cos 2x \text{ のグラフを} \\ x \text{ 軸方向に } -\dfrac{\pi}{8} \text{だけ } y \text{ 軸方向に } 1 \\ \text{だけ平行移動したグラフと読み取れる} \end{array}\right)$

8. $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，　$\tan\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$　$(\pi<\beta<2\pi)$ より

$\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，　$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{-2-2\sqrt{10}}{9}}$

(2)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{-4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}}$

(3)　$\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}=\dfrac{2\sqrt{10}-2}{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}}$

9. (1)　♣2 倍角の公式の利用

$\pi<\theta<2\pi$ で，$\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$ より

$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2-1=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{3}}{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=\boldsymbol{3\sqrt{7}}$

♡別解

$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}{\dfrac{1}{8}}=3\sqrt{7}$

(2)　♣ 半角の公式の利用

$\pi<\theta<2\pi$ より $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\pi$ であることに注意する

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)}{2}=\dfrac{7}{8}$

$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\pi$ より $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$　$\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}}{4}}$

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)}{2}=\dfrac{1}{8}$

$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\pi$ より $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$　$\therefore \cos\dfrac{\theta}{2}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)}{1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)}=7$

$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\pi$ より $\tan\dfrac{\theta}{2}<0$　$\therefore \tan\dfrac{\theta}{2}=\boldsymbol{-\sqrt{7}}$

10. (1)　$\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

(2) 半角の公式より

$\cos^2\dfrac{5}{8}\pi=\dfrac{1+\cos\dfrac{5}{4}\pi}{2}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\dfrac{5}{8}\pi<0$ であるから $\left(\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{5}{8}\pi<\pi\text{なので}\right)$

$\cos\dfrac{5}{8}\pi=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

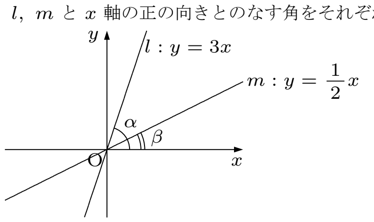
11. (1) $3x-y-2=0$　より　$y=3x-2$

$x-2y+2=0$　より　$y=\dfrac{1}{2}x+1$

$l : y=3x$,　$m : y=\dfrac{1}{2}x$　とすると

求める 2 直線のなす鋭角は l と m のなす鋭角に等しい

l，m と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とする



$\tan\alpha$ は直線 l の傾きなので $\tan\alpha=3$

$\tan\beta$ は直線 m の傾きなので $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

なす角は $\alpha-\beta$ であるから

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3-\dfrac{1}{2}}{1+3\cdot\dfrac{1}{2}}=1$

$0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\alpha-\beta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

♣ 補足

2 直線と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると

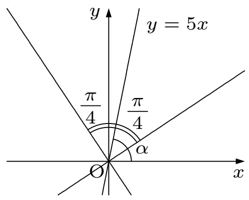
2 直線のなす角 θ は，図によっては $\theta=\pi-\beta+\alpha$ のように

なってしまうこともある。

そんなときに便利なのがコレ!!　なす角 θ はすべて

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$　で考えることができる

(2) 原点を通る直線で傾きを考える



$5x-y-3=0$ すなわち $y=5x-3$ より

$y=5x$ と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると $\tan\alpha=5$

求める直線の傾きは $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ と $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ より

$$\tan\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\frac{\pi}{4}}{1\mp\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{5\pm1}{1\mp5\cdot1}=-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$$

点 (2, 1) を通るので，求める 2 直線は

$y-1=-\frac{3}{2}(x-2)$，$y-1=\frac{2}{3}(x-2)$

$\therefore \boldsymbol{y=-\frac{3}{2}x+4,\ \ y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}$

♣ $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ と $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ を別々に計算してもよい

♡ 別解

♣
- 2 直線のなす角をθ
- x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれα, βとすると
- $\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$　が成り立つので
- $=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$
- ここで 2 直線の傾きを m_1，m_2とすると
- $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$　これを公式として利用

$5x-y-3=0$ の傾きは 5

求める直線の傾きを m とすると

2 直線のなす角が $\frac{\pi}{4}$ より

$$\tan\frac{\pi}{4}=\left|\frac{5-m}{1+5\cdot m}\right|$$

$1\cdot|1+5m|=|5-m|$

両辺正より 2 乗して整理すると

$6m^2+5m-6=0$

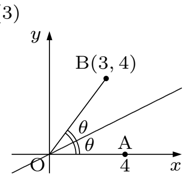
$(2m+3)(3m-2)=0$　　$\therefore m=-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$

点 (2, 1) を通るので，求める 2 直線は

$y-1=-\frac{3}{2}(x-2)$，$y-1=\frac{2}{3}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+4$，$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

(3)



$\angle$AOB$=2\theta$ とすると $\tan2\theta=\frac{4}{3}$

$\angle$AOB の二等分線と x 軸の正の向きとのなす角は θ であるから

求める直線の傾きは $\tan\theta$ である

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ より

$\frac{4}{3}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$4(1-\tan^2\theta)=6\tan\theta$

$2\tan^2\theta+3\tan\theta-2=0$

$(2\tan\theta-1)(\tan\theta+2)=0$

$\tan\theta=\frac{1}{2}$，-2

図より求める直線の傾きは正より求める直線は $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$

12. (1) $\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)$

$=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

よって $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(2)　$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$ を求める

$\sin x+\cos y=1$ を 2 乗して

$\sin^2x+2\sin x\cos y+\cos^2y=1\cdots\cdots$①

$\cos x-\sin y=-\frac{1}{3}$ を 2 乗して

$\cos^2x-2\cos x\sin y+\sin^2y=\frac{1}{9}\cdots\cdots$②

①＋② より

$\sin^2x+\cos^2x+2(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$

$+\cos^2y+\sin^2y=\frac{10}{9}$

$1+2(\sin x\cos y-\cos x\sin y)+1=\frac{10}{9}$

$\sin x\cos y-\cos x\sin y=-\frac{4}{9}$

$\therefore \boldsymbol{\sin(x-y)=-\frac{4}{9}}$

(3)　$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$

$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}$

ここで $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{2+5}{1-2\cdot5}=-\frac{7}{9}$ より

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot8}=1$$

α，β，γ は鋭角なので $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{2}\pi$ より

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$，$\frac{5}{4}\pi$

さらによく調べると $\tan\alpha=2$ より $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

同様に $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}<\gamma<\frac{\pi}{2}$

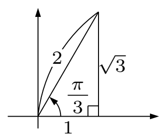
よって $\frac{3}{4}\pi<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{2}\pi$ なので

$\alpha+\beta+\gamma=\boldsymbol{\frac{5}{4}\pi}$

13. ♣ 合成

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

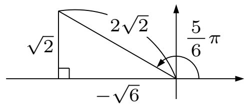
$=\boldsymbol{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$



(2)　$\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$

$=-\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$

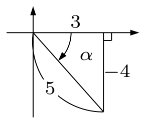
$=\boldsymbol{2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)}$



(3)　$3\sin\theta-4\cos\theta$

$=\boldsymbol{5\sin(\theta+\alpha)}$

ただし$\boldsymbol{\alpha}$は $\begin{cases}\boldsymbol{\sin\alpha=-\frac{4}{5}}\\ \boldsymbol{\cos\alpha=\frac{3}{5}}\end{cases}$ **を満たす角**



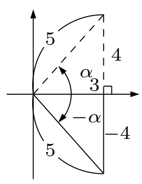
♡別解

$3\sin\theta-4\cos\theta$

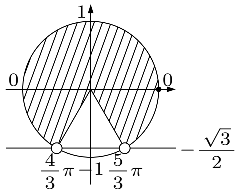
$=5\sin(\theta-\alpha)$

ただしαは $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\end{cases}$ を満たす角

としてもよい

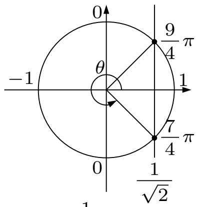


14. (1) $\sin\theta > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$



$$\begin{cases} \boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{4}{3}\pi} \\ \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi} \end{cases}$$

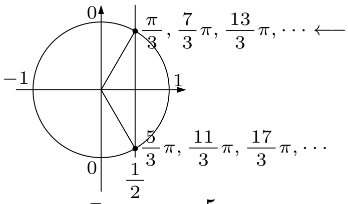
(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{7}{3}\pi\right)$



$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{7}{3}\pi$に注意して

$\boldsymbol{\theta = \frac{7}{4}\pi,\ \ \frac{9}{4}\pi}$

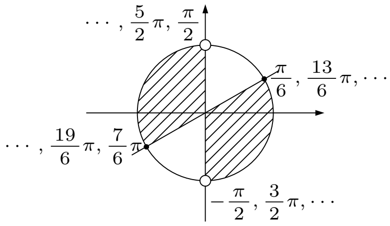
(3) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ θは一般角 で考える（角に制限なし）



$\therefore \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi}$ **（k は整数）**

$\left(\theta = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\ \ (k \text{ は整数}) \text{ とまとめてもよい}\right)$

(4) $\tan\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ θは一般角 で考える（角に制限なし）



$\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < \theta \leqq \dfrac{13}{6}\pi, \cdots\right)$

π ずつ増えているので

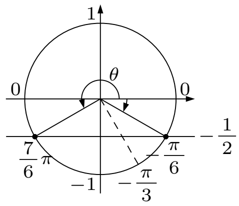
$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} + k\pi < \theta \leqq \frac{\pi}{6} + k\pi}$ **（k は整数）**

$\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi < \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi + k\pi\ (k \text{ は整数}) \text{ 等でもよい}\right)$

(5) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$A = \theta - \dfrac{\pi}{3}$ とおくと $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ より

$\sin A = -\dfrac{1}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{3} \leqq A < \dfrac{5}{3}\pi\right)$ として考えると



$A = -\dfrac{\pi}{6},\ \ \dfrac{7}{6}\pi$

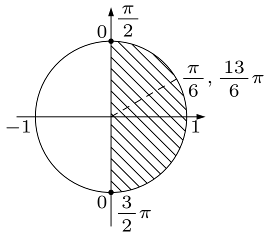
$\theta - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6},\ \ \dfrac{7}{6}\pi$

$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6},\ \ \frac{3}{2}\pi}$

(6) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqq 0$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$A = \theta + \dfrac{\pi}{6}$ とおくと $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ より

$\cos A \geqq 0$ $\left(\dfrac{\pi}{6} \leqq A < \dfrac{13}{6}\pi\right)$



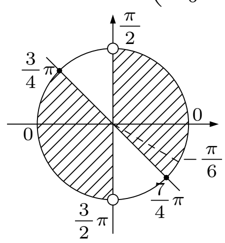
$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \leqq A \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3}{2}\pi \leqq A < \dfrac{13}{6}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi} \end{cases}$$

(7) $\tan\left(2\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) \geqq -1$ $(0 \leqq \theta < \pi)$

$A = 2\theta - \dfrac{\pi}{6}$ とおくと $-\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{11}{6}\pi$ より

$\tan A \geqq -1$ $\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqq A < \dfrac{11}{6}\pi\right)$



$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} \leqq A < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3}{4}\pi \leqq A < \dfrac{3}{2}\pi \\ \dfrac{7}{4}\pi \leqq A < \dfrac{11}{6}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3}{4}\pi \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{3}{2}\pi \\ \dfrac{7}{4}\pi \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{11}{6}\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{11}{24}\pi \leqq \theta < \frac{5}{6}\pi} \\ \boldsymbol{\frac{23}{24}\pi \leqq \theta < \pi} \end{cases}$$

(8) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = -1$ を合成すると

$2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ $\therefore \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$A = \theta + \dfrac{\pi}{6}$ とおくと $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ より

$\sin A = -\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{\pi}{6} \leqq A < \dfrac{13}{6}\pi\right)$

$A = \theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7}{6}\pi,\ \ \dfrac{11}{6}\pi$ $\therefore \boldsymbol{\theta = \pi,\ \ \frac{5}{3}\pi}$

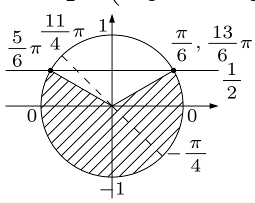
(9) $\sin 3\theta - \cos 3\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 合成して

$\sqrt{2}\sin\left(3\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(3\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \dfrac{1}{2}$ $(0 \leqq \theta < \pi)$

$A = 3\theta - \dfrac{\pi}{4}$ とおくと $-\dfrac{\pi}{4} \leqq 3\theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{11}{4}\pi$ より

$\sin A \leqq \dfrac{1}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq A < \dfrac{11}{4}\pi\right)$



$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \leqq A \leqq \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{5}{6}\pi \leqq A \leqq \dfrac{13}{6}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \leqq 3\theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{5}{6}\pi \leqq 3\theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{13}{6}\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{36}\pi} \\ \boldsymbol{\frac{13}{36}\pi \leqq \theta \leqq \frac{29}{36}\pi} \end{cases}$$

(10) $\sqrt{3}\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{3}$

♣ 角を θ にそろえる

半角の公式より $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

２倍角の逆より $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\sin\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\theta$

を代入して

$\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\theta=\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\longleftarrow$ 合成した

$A=\theta-\dfrac{\pi}{3}$ とおくと $-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$ より

$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad\left(-\dfrac{\pi}{3}\leqq A<\dfrac{5}{3}\pi\right)$

$A=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$ θ に直すと $\boldsymbol{\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \pi}$

15. (1) $\cos 2\theta+(2-\sqrt{3})\cos\theta+1-\sqrt{3}=0$

$2\cos^2\theta-1+(2-\sqrt{3})\cos\theta+1-\sqrt{3}=0$

$2\cos^2\theta+(2-\sqrt{3})\cos\theta-\sqrt{3}=0$

$(2\cos\theta-\sqrt{3})(\cos\theta+1)=0$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\quad\therefore\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$

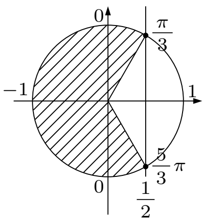
(2) $2\sin^2\theta\geqq 3\cos\theta$

$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta\geqq 0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\leqq 0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)\leqq 0$

$-2\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$



$\therefore\ \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi}$

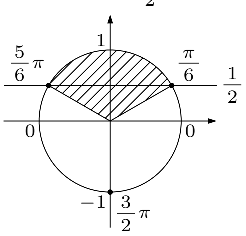
(3) $\cos 2\theta\leqq\sin\theta$

$1-2\sin^2\theta-\sin\theta\leqq 0$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq 0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)\geqq 0$

$\sin\theta\leqq-1,\quad\dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta$



$\therefore\ \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi,\ \ \theta=\dfrac{3}{2}\pi}$

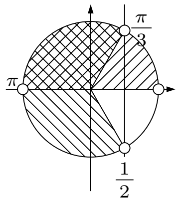
(4) $\sin 2\theta<\sin\theta$

$2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta<0$

$\sin\theta(2\cos\theta-1)<0$

(i) $\sin\theta>0$ かつ $2\cos\theta-1<0$

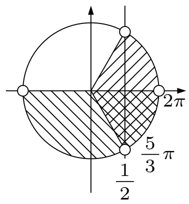
すなわち $\sin\theta>0$ かつ $\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ のとき



$\therefore\ \dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi$

(ii) $\sin\theta<0$ かつ $2\cos\theta-1>0$

すなわち $\sin\theta<0$ かつ $\cos\theta>\dfrac{1}{2}$ のとき



$\therefore\ \dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

(i)(ii) より $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi,\ \ \dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi}$

(5) $\sin 2\theta-2\cos^2\theta+\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$2\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta+\sqrt{2}\left(\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$2\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta+\cos\theta-\sin\theta=0$

$2\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)-(\sin\theta-\cos\theta)=0$

$(\sin\theta-\cos\theta)(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore\sin\theta-\cos\theta=0$ または $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(i) $\sin\theta-\cos\theta=0$ より

$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$ の範囲で

$\theta-\dfrac{\pi}{4}=0,\ \pi\quad\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

(ii) $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(i)(ii) より $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(6) $\tan\theta>2\sin\theta$

$\tan\theta>2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta$

$\tan\theta>2\tan\theta\cos\theta$ $\longleftarrow$ なかなか思いつかないよね

$\tan\theta(2\cos\theta-1)<0$

(i) $\tan\theta>0$ かつ $\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ のとき

$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2},\quad\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

(ii) $\tan\theta<0$ かつ $\cos\theta>\dfrac{1}{2}$ のとき

$\dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

(i)(ii) より $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi}$

♡ 別解

$\tan\theta>2\sin\theta$

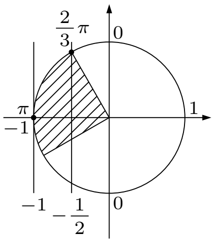
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}>2\sin\theta$ ここから場合分けをすればよい

(i) $\cos\theta>0$ のとき $\sin\theta>2\sin\theta\cos\theta$

(ii) $\cos\theta<0$ のとき $\sin\theta<2\sin\theta\cos\theta$ 以下略

16. (1) $y=-3\cos x-1 \quad \left(\frac{2}{3}\pi \leqq x < \frac{7}{6}\pi\right)$

$\frac{2}{3}\pi \leqq x < \frac{7}{6}\pi$ であるから $\cos x$ の値の範囲は



$-1 \leqq \cos x \leqq -\frac{1}{2}$

これより

$3 \geqq -3\cos x \geqq \frac{3}{2}$

$\therefore 2 \geqq -3\cos x-1 \geqq \frac{1}{2}$

最大となるのは $\cos x=-1$ より $x=\pi$ のとき

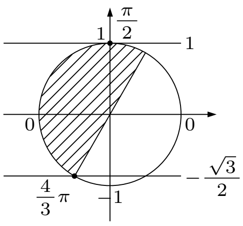
最小となるのは $\cos x=-\frac{1}{2}$ より $x=\frac{2}{3}\pi$ のとき

よって **最大値 2 $(x=\pi)$，最小値$\frac{1}{2}$ $\left(x=\frac{2}{3}\pi\right)$**

(2) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

$A=x+\frac{\pi}{3}$ とおくと $\frac{\pi}{3} \leqq x+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi$ であるから

$y=2\sin A \quad \left(\frac{\pi}{3} \leqq A \leqq \frac{4}{3}\pi\right)$



$\sin A$ の値の範囲は

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin A \leqq 1$

$\therefore -\sqrt{3} \leqq 2\sin A \leqq 2$

最大となるのは $\sin A=1$ より

$A=x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore x=\frac{\pi}{6}$ のとき

最小となるのは $\sin A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$A=x+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi \quad \therefore x=\pi$のとき

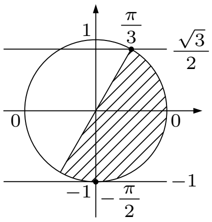
$\therefore$ **最大値 2 $\left(x=\frac{\pi}{6}\right)$，最小値 $-\sqrt{3}$ $(x=\pi)$**

(3) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \quad \longleftarrow$ 合成した

$\left(A=x-\frac{\pi}{6}\right.$ と置き換えた方がミスは少ないかも$\left.\right)$

$-\frac{2}{3}\pi \leqq x-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\pi}{3}$ より $\longleftarrow$ 置き換えなくても範囲確認



$-1 \leqq \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

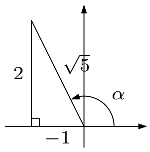
よって $-2 \leqq 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq \sqrt{3}$

最大となるのは $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \quad \therefore x=\frac{\pi}{2}$ のとき

最小となるのは $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2} \quad \therefore x=-\frac{\pi}{3}$ のとき

$\therefore$ **最大値$\sqrt{3}$ $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$，最小値 -2 $\left(x=-\frac{\pi}{3}\right)$**

(4) $y=2\cos x-\sin x=-\sin x+2\cos x$



$=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$

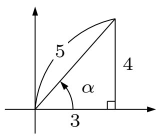
ただしαは $\begin{cases} \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$ を満たす角

$-1 \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$ であるから

$-\sqrt{5} \leqq \sqrt{5}\sin(x+\alpha) \leqq \sqrt{5}$

よって **最大値$\sqrt{5}$，最小値 $-\sqrt{5}$**

(5) $y=3\sin x+4\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$



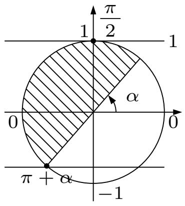
$=5\sin(x+\alpha)$

ただしαは $\begin{cases} \sin\alpha=\frac{4}{5} \\ \cos\alpha=\frac{3}{5} \end{cases}$ を満たす角

$\sin(x+\alpha)$ の範囲を求めると

$0 \leqq x \leqq \pi$より $\alpha \leqq x+\alpha \leqq \pi+\alpha$ なので

(αの大きさは上図の通りで描ける)



$\sin(\pi+\alpha) \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$

ここで

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ より

$-\frac{4}{5} \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$

$-4 \leqq 5\sin(x+\alpha) \leqq 5$

よって **最大値 5，最小値 -4**

♣ そのときの x を求めるときは次のようになる

最大となるのは $x+\alpha=\frac{\pi}{2}$より $x=\frac{\pi}{2}-\alpha$ のとき

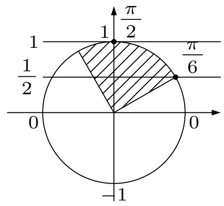
最小となるのは $x+\alpha=\pi+\alpha$より $x=\pi$ のとき

(6) $y=\tan x+\frac{1}{\tan x} \quad \left(\frac{\pi}{12} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}$

$=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$

ここで $\frac{\pi}{12} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ より $\frac{\pi}{6} \leqq 2x \leqq \frac{2}{3}\pi$ なので



$\frac{1}{2} \leqq \sin 2x \leqq 1$

$2 \geqq \frac{1}{\sin 2x} \geqq 1$

$\therefore 4 \geqq \frac{2}{\sin 2x} \geqq 2$

最大となるのは $\sin 2x=\frac{1}{2}$ より $2x=\frac{\pi}{6} \quad \therefore x=\frac{\pi}{12}$

最小となるのは $\sin 2x=1$ より $2x=\frac{\pi}{2} \quad \therefore x=\frac{\pi}{4}$

よって **最大値 4 $\left(x=\frac{\pi}{12}\right)$，最小値 2 $\left(x=\frac{\pi}{4}\right)$**

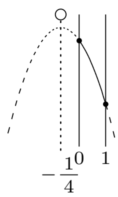
17. (1) $y=\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

$=1-\sin^2 x-\sin^2 x-\sin x$

$=-2\sin^2 x-\sin x+1$

$t=\sin x$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 1)$

$y=-2t^2-t+1=-2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$



よって $t=0$ すなわち

$x=0$，πのとき最大値 1

$t=1$ すなわち

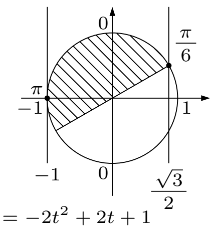
$x=\frac{\pi}{2}$のとき最小値 -2

(2) $y=2\cos x-\cos 2x \quad \left(\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{7}{6}\pi\right)$

$=2\cos x-(2\cos^2 x-1)$

$=-2\cos^2 x+2\cos x+1$

$\cos x=t$ とおくと

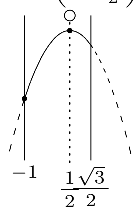


$-1 \leqq \cos x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore -1 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y=-2t^2+2t+1$

$=-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2} \quad \left(-1 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$



よって $t=\dfrac{1}{2}$ すなわち

$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{3}}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$t=-1$ すなわち

$\boldsymbol{x=\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-3}$

18. ♣ 三角関数の最重要問題です

(1) $y=2\sin x+2\cos x-\sin 2x+1 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

$=2(\sin x+\cos x)-2\sin x\cos x+1$

$\sin x+\cos x=t$ とおくと

(i) y を t の式で表す

$\sin x+\cos x=t$ を 2 乗して

$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$

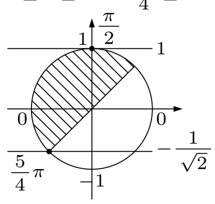
$1+2\sin x\cos x=t^2 \quad \therefore \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

よって $y=2t-2\cdot\dfrac{t^2-1}{2}+1=-t^2+2t+2$

(ii) t の範囲を求める。合成して

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$より $\dfrac{\pi}{4} \leqq x+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ なので



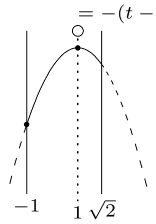
$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

$-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$

$\therefore -1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

よって $y=-t^2+2t+2 \quad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$=-(t-1)^2+3$



$t=1$ のとき最大値 3

$t=-1$ のとき最小値 -1

最大となる x は $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ より

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore x=0,\ \dfrac{\pi}{2}$のとき

最小となる x は $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ より

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore x=\pi$のとき

以上より

$\boldsymbol{x=0,\ \dfrac{\pi}{2}}$ **のとき最大値 3，** $\boldsymbol{x=\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-1}$

(2) ♣ パターン問題です。解法を覚えること!!

$y=3\cos^2 x+4\sin x\cos x-\sin^2 x \quad (0 \leqq x < \pi)$

角を $2x$ にそろえる

半角の公式より $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

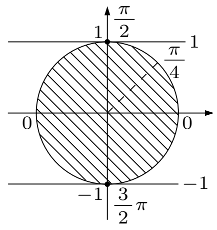
２倍角の逆より $2\sin x\cos x=\sin 2x$ 　を代入して

$y=3\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+2\sin 2x-\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$=2\sin 2x+2\cos 2x+1$ 　合成して

$=2\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

$0 \leqq x < \pi$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq 2x+\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ なので



$-1 \leqq \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

$-2\sqrt{2} \leqq 2\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}+1 \leqq 2\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1 \leqq 2\sqrt{2}+1$

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2} \quad \therefore x=\dfrac{\pi}{8}$のとき最大

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi \quad \therefore x=\dfrac{5}{8}\pi$のとき最小

よって **最大値** $\boldsymbol{2\sqrt{2}+1 \quad \left(x=\dfrac{\pi}{8}\right)}$

最小値 $\boldsymbol{-2\sqrt{2}+1 \quad \left(x=\dfrac{5}{8}\pi\right)}$

19. $y = 2\sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) - \sqrt{3}a\sin x + a\cos x$

$= 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + a(-\sqrt{3}\sin x + \cos x)$

(1) $t = -\sqrt{3}\sin x + \cos x$ を 2 乗して

$t^2 = 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x$

$t^2 = 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 - \sin^2 x$

$\therefore 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = t^2 - 1$ を y に代入して

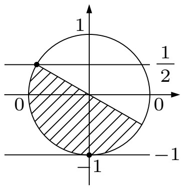
$y = t^2 - 1 + at$

$\boldsymbol{y = t^2 + at - 1}$

(2) まず t の範囲を求める

$t = -\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $\frac{5}{6}\pi \leqq x + \frac{5}{6}\pi \leqq \frac{11}{6}\pi$ であるから



$-1 \leqq \sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) \leqq \frac{1}{2}$

$\therefore -2 \leqq t \leqq 1$

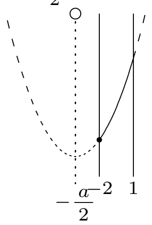
したがって

$y = t^2 + at - 1$

$= \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - 1 \quad (-2 \leqq t \leqq 1)$

軸 $t = -\frac{a}{2}$ で下に凸であるから

(i) $-\frac{a}{2} < -2$ すなわち $a > 4$ のとき



$t = -2$ で

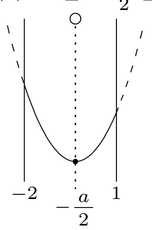
最小値 $-2a + 3$

$\therefore -2a + 3 = -3$ より

$a = 3$

これは $a > 4$ に不適

(ii) $-2 \leqq -\frac{a}{2} \leqq 1$ すなわち $-2 \leqq a \leqq 4$ のとき



$t = -\frac{a}{2}$ で

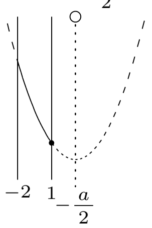
最小値 $-\frac{a^2}{4} - 1$

$\therefore -\frac{a^2}{4} - 1 = -3$

$a^2 = 8 \qquad a = \pm 2\sqrt{2}$

$-2 \leqq a \leqq 4$ より $a = 2\sqrt{2}$

(iii) $1 < -\frac{a}{2}$ すなわち $a < -2$ のとき



$t = 1$ で

最小値 a

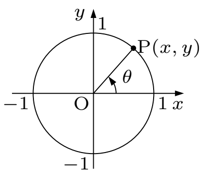
$\therefore a = -3$

これは $a < -2$ を満たす

(i)(ii)(iii) より $\boldsymbol{a = 2\sqrt{2},\ -3}$

20. (1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおく。

OP と x 軸の正の向きとのなす角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とすると



$\mathrm{P}(x,\ y) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおける

よって

$xy = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$0 \leqq 2\theta < 4\pi$ より

$-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$

$\therefore -\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2}\sin 2\theta \leqq \frac{1}{2}$

よって最小値は $-\frac{1}{2}$

最小となるのは $\sin 2\theta = -1$ $(0 \leqq 2\theta < 4\pi)$ のとき

$2\theta = \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$ より $\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ なので

$(x,\ y) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ に代入して

$(x,\ y) = \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順）

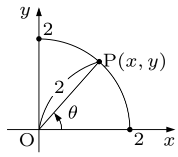
したがって

$\boldsymbol{(x,\ y) = \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ **（複号同順）のとき最小値** $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(2) 円 $x^2 + y^2 = 4,\ \ x \geqq 0,\ \ y \geqq 0$ 上の点を

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおく

OP と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると



$\mathrm{P}(x,\ y) = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

とおける

ただし $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

よって

$x^2 - y^2 - 2xy$

$= 4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta - 8\cos\theta\sin\theta$

♣ 角を 2θ にそろえる

半角の公式より $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

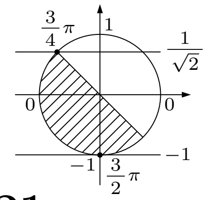
2 倍角の逆より $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

$= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 4 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 4\sin 2\theta$

$= -4\sin 2\theta + 4\cos 2\theta$ 　合成して

$= 4\sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{3}{4}\pi\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\frac{3}{4}\pi \leqq 2\theta + \frac{3}{4}\pi \leqq \frac{7}{4}\pi$ なので



$-1 \leqq \sin\left(2\theta + \frac{3}{4}\pi\right) \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-4\sqrt{2} \leqq 4\sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{3}{4}\pi\right) \leqq 4$

よって**最大値 4 　最小値** $\boldsymbol{-4\sqrt{2}}$

21. $5x^2 + ax - 2 = 0$ の 2 つの解が $\sin\theta,\ \cos\theta$ より

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = -\frac{a}{5} & \cdots\cdots ① \\ \sin\theta\cos\theta = -\frac{2}{5} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①を 2 乗して $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{a^2}{25}$

②を代入して $1 + 2\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{a^2}{25}$

$a^2 = 5 \qquad a > 0$ より $a = \sqrt{5}$

このとき $5x^2 + \sqrt{5}x - 2 = 0$ の解は $x = \frac{\sqrt{5}}{5},\ \ -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

この解が $\sin\theta,\ \cos\theta$ で

$0 < \theta < \pi$ と②より $\sin\theta > 0,\ \cos\theta < 0$ であるから

$\boldsymbol{a = \sqrt{5},\ \ \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5},\ \ \cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

22.(1) $\sin^2 x + \cos x + 1 - k = 0$

$1 - \cos^2 x + \cos x + 1 - k = 0$

$-\cos^2 x + \cos x + 2 = k$

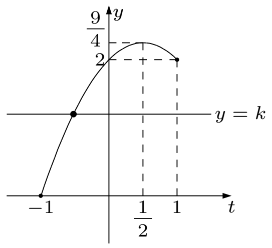
$t = \cos x$ とおくと

$-t^2 + t + 2 = k \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$

この方程式が解をもつのは $-1 \leqq t \leqq 1$ において

$\begin{cases} y = -t^2 + t + 2 \\ y = k \end{cases}$ が共有点をもつときである

$y = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$ のグラフは



よって方程式が解をもつ k の範囲は $\boldsymbol{0 \leqq k \leqq \dfrac{9}{4}}$

♣ 初見では，$t = \cos x$ とおいて

$t^2 - t + k - 2 = 0$ から

判別式 $= 1 - 4(k-2) \geqq 0$ としてしまう人が多い

$-1 \leqq t \leqq 1$ に解をもつ必要があるためこれだけでは条件不足

(2) ♣ グラフの共有点の個数と解の個数は一致しないことに注意

$t = \cos x \ (0 \leqq x < 2\pi)$ より

1つの t に対して x も1つでてくるときと

1つの t に対して x が2つでてくるときがある

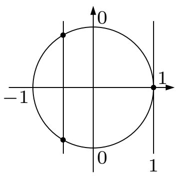
例えば

$t = 1$ すなわち $\cos x = 1$ のときは $x = 0$ で

1つの t に対して x も1つでてくる

$t = -\dfrac{1}{2}$ すなわち $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ のときは $x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ で

1つの t に対して x は2つでてくる



$0 \leqq x < 2\pi$ より

$-1 < t < 1$ のときは

1 つの t に対して解 x は 2 つ

$t = 1,\ -1$ のときは

1 つの t に対して解 x も 1 つ

であるから

(1) のグラフから実数解 x の個数は

$\begin{cases} \boldsymbol{k > \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{k = \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{2 < k < \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \textbf{4 個} \\ \boldsymbol{k = 2} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \\ \boldsymbol{0 < k < 2} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k = 0} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{k < 0} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$

23. $f(x) = \cos 2x - 4k\sin x - 4k - 3$

$= 1 - 2\sin^2 x - 4k\sin x - 4k - 3$

$= -2\sin^2 x - 4k\sin x - 4k - 2$

$t = \sin x$ とおくと

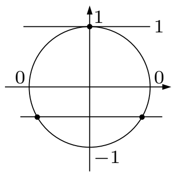
$f(x) = -2t^2 - 4kt - 4k - 2$

(1) $f(x) = 0$ のとき

$-2t^2 - 4kt - 4k - 2 = 0$ より

$t^2 + 2kt + 2k + 1 = 0 \cdots\cdots ①$

ここで $t = \sin x$ で $0 \leqq x < 2\pi$ より



$-1 < t < 1$ のときは

1 つの t に対して解 x は 2 つ

$t = 1,\ -1$ のときは

1 つの t に対して解 x も 1 つ

であるから

$f(x) = 0$ が $0 \leqq x < 2\pi$ に異なる 2 つの解をもつのは

次の (I)(II) の場合である

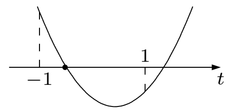
(I) ① が $-1 < t < 1$ にただ一つの t をもつとき

(II) ① が $t = -1$ と $t = 1$ の両方を解にもつとき

$g(t) = t^2 + 2kt + 2k + 1$ とする

(I) ① が $-1 < t < 1$ にただ一つの t をもつとき

(i)$g(-1) > 0$ かつ $g(1) < 0$ のとき



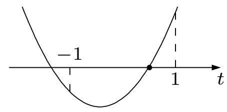
$g(-1) = 1 - 2k + 2k + 1 = 2$

よって $g(-1) > 0$ は常に成り立つ

$g(1) = 1 + 2k + 2k + 1 < 0$

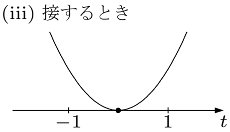
$\therefore k < -\dfrac{1}{2}$

(ii)$g(-1) < 0$ かつ $g(1) > 0$ のとき



$g(-1) = 2 > 0$ なのでグラフがこのようになることはない

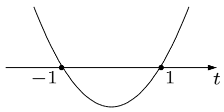
(iii) 接するとき



$D/4 = k^2 - 2k - 1 = 0 \quad \therefore k = 1 \pm \sqrt{2}$

このうち $-1 < t < 1$ に解をもつのは $k = 1 - \sqrt{2}$

(II) ① が $t = -1$ と $t = 1$ の両方を解にもつとき



$g(-1) = 2 > 0$ なのでグラフがこのようになることはない

(I)(II) より $\boldsymbol{k < -\dfrac{1}{2},\ \ k = 1 - \sqrt{2}}$

(2) $f(x)=-2t^2-4kt-4k-2<0$ のとき

$t^2+2kt+2k+1>0$

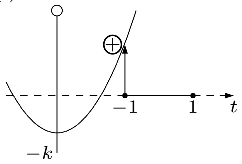
$g(t)=t^2+2kt+2k+1$ とすると $-1\leqq t\leqq 1$ より

$-1\leqq t\leqq 1$ で常に $g(t)>0$ が成り立てばよい

$g(t)=(t+k)^2-k^2+2k+1$ より軸 $t=-k$

軸の位置で場合分けをする

(i) 軸 $-k<-1$ すなわち $k>1$ のとき



$g(-1)>0$ であればよい

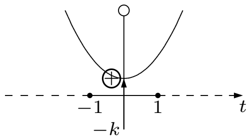
$g(-1)=2>0$ であるから

$k>1$ のときは

$-1\leqq t\leqq 1$ で常に $g(t)>0$

$\therefore k>1$

(ii) $-1\leqq -k\leqq 1$ すなわち $-1\leqq k\leqq 1$ のとき



$g(-k)>0$ であればよい

$g(-k)=-k^2+2k+1>0$

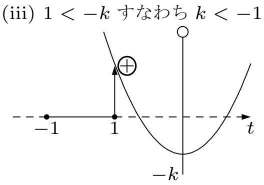
$k^2-2k-1<0$

$1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}$

$-1\leqq k\leqq 1$ より

$1-\sqrt{2}<k\leqq 1$

(iii) $1<-k$ すなわち $k<-1$ のとき



$g(1)>0$ であればよい

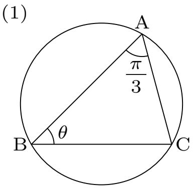
$g(1)=4k+2>0$ より

$k>-\dfrac{1}{2}$

これは $k<-1$ に不適

(i)(ii)(iii) より $\boldsymbol{k>1-\sqrt{2}}$

24.(1)



$B=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi\right)$ とおくと

$C=\pi-\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi-\theta$

△ABC の外接円の半径が 1 であるから，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=2\cdot 1$$

よって $\mathrm{AC}=2\sin\theta$,

$$\mathrm{AB}=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\theta-\cos\frac{2}{3}\pi\sin\theta\right)$$

$$=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$$

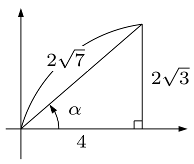
したがって

$2\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)+2\sin\theta$

$=4\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)$ ⟵ 合成した

ただしαは



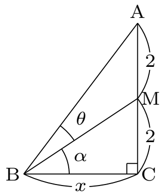
$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\\ \cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}\end{cases}$ を満たす角

$0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ より $\alpha<\theta+\alpha<\dfrac{2}{3}\pi+\alpha$ なので

$\sin(\theta+\alpha)=1\ \left(\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}\right)$ となるθが存在

よって最大値は $2\sqrt{7}\cdot 1=\boldsymbol{2\sqrt{7}}$

(2)



$\angle\mathrm{MBC}=\alpha$, $\mathrm{BC}=x$ とおくと

$\tan(\theta+\alpha)=\dfrac{4}{x}\cdots\cdots$①

$\tan\alpha=\dfrac{2}{x}\cdots\cdots$②

①より $\dfrac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}=\dfrac{4}{x}$

②を代入して $\dfrac{\tan\theta+\frac{2}{x}}{1-\tan\theta\cdot\frac{2}{x}}=\dfrac{4}{x}$

$\dfrac{x\tan\theta+2}{x-2\tan\theta}=\dfrac{4}{x}$

$x^2\tan\theta+2x=4x-8\tan\theta$

$(x^2+8)\tan\theta=2x$

$\tan\theta=\dfrac{2x}{x^2+8}$

θ が最大となるのは $\tan\theta$ が最大となるとき

$\tan\theta=\dfrac{2}{x+\frac{8}{x}}$ と変形すると

$x>0$, $\dfrac{8}{x}>0$ であるから相加平均と相乗平均の関係より

$x+\dfrac{8}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{8}{x}}=4\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{x+\frac{8}{x}}\leqq\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{2}{x+\frac{8}{x}}\leqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

等号成立は $x=\dfrac{8}{x}$ のときで $x>0$ より $x=2\sqrt{2}$

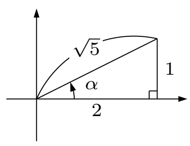
このとき $\tan\theta$ は最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

よって θ が最大となるとき BC= $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(3) $2\sin\theta+\cos\theta=a\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)=a$ と合成する

ただしαは

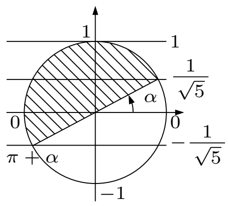


$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$ を満たす角

$\sin(\theta+\alpha)=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$ とすると

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ なので

（αの大きさは図の通り）



ここで

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

であるから

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\leqq\dfrac{a}{\sqrt{5}}<1 \text{ のとき} & 2\text{ 個}\\ \dfrac{a}{\sqrt{5}}=1,\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\leqq\dfrac{a}{\sqrt{5}}<\dfrac{1}{\sqrt{5}}\text{ のとき} & 1\text{ 個}\\ \dfrac{a}{\sqrt{5}}<-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ 1<\dfrac{a}{\sqrt{5}}\text{ のとき} & 0\text{ 個}\end{cases}$$

よって

$$\begin{cases}\boldsymbol{1\leqq a<\sqrt{5}}\textbf{ のとき} & \textbf{2 個}\\ \boldsymbol{a=\sqrt{5},\ -1\leqq a<1}\textbf{ のとき} & \textbf{1 個}\\ \boldsymbol{a<-1,\ \sqrt{5}<a}\textbf{ のとき} & \textbf{0 個}\end{cases}$$

25. (1) $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ において $\theta = 18^\circ$ とすると

$\sin 2\theta = \cos 3\theta$

ここから $\sin\theta$ を求めればよい

$\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$ より　$\longleftarrow$ 覚えてなければ導く

$2\sin\theta\cos\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

$\cos\theta(4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3) = 0$

$\cos\theta(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta = 0,\quad \sin\theta = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\sin 18^\circ > 0$ より $\boldsymbol{\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

(2) $\tan\dfrac{\theta}{2} = t$ のとき（求めやすい順に求めます）

$\tan\theta = \tan\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)$　$\longleftarrow$ 2 倍角の公式を利用する

$= \dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

次に $\cos\theta = \cos\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$

ここで $\tan^2\dfrac{\theta}{2} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$ より $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{t^2+1}$

$\therefore \cos\theta = 2\cdot\dfrac{1}{t^2+1} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

以上より

$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}}$

♡ 別解（最初に $\sin\theta$ を求めることも可能）

$\sin\theta = \sin\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$ より $\sin\dfrac{\theta}{2} = \tan\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ を代入して

$\sin\theta = 2\tan\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2} = 2t\cdot\dfrac{1}{t^2+1} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

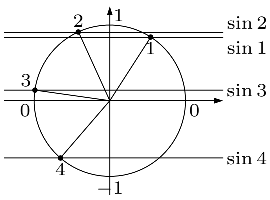
(3) $\sin 1,\quad \sin 2,\quad \sin 3,\quad \sin 4$

♣$\pi \fallingdotseq 3.14$ をもとに 角 1, 2, 3, 4 の大きさを考える

$\dfrac{\pi}{4} < 1 < \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$\dfrac{\pi}{2} < 2 < \dfrac{2}{3}\pi,\quad \dfrac{3}{4}\pi < 3 < \pi,\quad \pi < 4 < \dfrac{4}{3}\pi$

よって



$\boldsymbol{\sin 4 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2}$

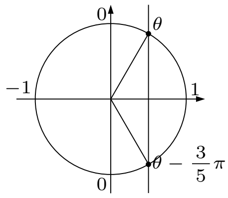
♣ もっと正確に $\dfrac{5}{6}\pi < 3 < \pi,\ \dfrac{5}{4}\pi < 4 < \dfrac{4}{3}\pi$ で考えてもよい

26. (1) $\cos\theta = \cos\left(\theta - \dfrac{3}{5}\pi\right)$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

♣ この式のまま cos の値が等しくなる角を考える

$0 \leqq \theta \leqq \pi,\quad -\dfrac{3}{5}\pi \leqq \theta - \dfrac{3}{5}\pi \leqq \dfrac{2}{5}\pi$ で

$\theta - \dfrac{3}{5}\pi < \theta$ であるから



θ と $\theta - \dfrac{3}{5}\pi$ の関係が
図のようになるとき
cos の値が等しくなる

$\theta = -\left(\theta - \dfrac{3}{5}\pi\right)$ より

$2\theta = \dfrac{3}{5}\pi$

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{10}\pi}$

♡ 別解（和と積の公式の利用）

$\cos\theta - \cos\left(\theta - \dfrac{3}{5}\pi\right) = 0$

和と積の公式より

$-2\sin\dfrac{\theta + \left(\theta - \dfrac{3}{5}\pi\right)}{2}\sin\dfrac{\theta - \left(\theta - \dfrac{3}{5}\pi\right)}{2} = 0$

$-2\sin\left(\theta - \dfrac{3}{10}\pi\right)\sin\dfrac{3}{10}\pi = 0$

$\sin\dfrac{3}{10}\pi \neq 0$ より $\sin\left(\theta - \dfrac{3}{10}\pi\right) = 0$

$-\dfrac{3}{10}\pi \leqq \theta - \dfrac{3}{10}\pi \leqq \dfrac{7}{10}\pi$ であるから

$\theta - \dfrac{3}{10}\pi = 0\qquad \therefore \theta = \dfrac{3}{10}\pi$

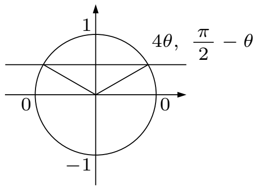
(2) $\sin 4\theta = \cos\theta\quad \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\sin 4\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

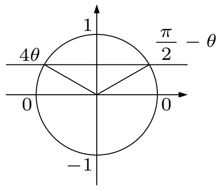
$0 < 4\theta < 2\pi,\quad 0 < \dfrac{\pi}{2} - \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

sin の値が等しくなるのは次の 2 通りの可能性がある

(i)



(ii)



(i) $4\theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ のとき

$\theta = \dfrac{\pi}{10}$

(ii) $4\theta = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ のとき

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(i)(ii) より $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{10},\ \dfrac{\pi}{6}}$

♡ 別解

こちらも和と積の公式を利用して求めることができます

27. (1) $\sin 2\theta\cos 4\theta$

$= \dfrac{1}{2}\{\sin(2\theta + 4\theta) + \sin(2\theta - 4\theta)\}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(\sin 6\theta - \sin 2\theta)}$

(2) $\cos 5\theta - \cos 3\theta$

$= -2\sin\dfrac{5\theta + 3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta - 3\theta}{2} = \boldsymbol{-2\sin 4\theta\sin\theta}$

28. (1) $2\cos\frac{5}{12}\pi\cos\frac{1}{12}\pi$

$=\cos\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{12}\pi\right)+\cos\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{1}{12}\pi\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=0+\frac{1}{2}=\underline{\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}}$

(2) $\sin 105^\circ-\sin 15^\circ$

$=2\cos\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2}$

$=2\cos 60^\circ\sin 45^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}}}$

(3) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

$=-\frac{1}{2}\{\cos 60^\circ-\cos(-20^\circ)\}\sin 80^\circ$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos 20^\circ\right)\sin 80^\circ$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{2}\sin 80^\circ\cos 20^\circ$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)$

$=\frac{1}{4}(-\sin 80^\circ+\sin 100^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{8}$

$=\frac{1}{4}(-\sin 80^\circ+\sin 80^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{8}=\underline{\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}}}}$

29. (1) $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta=0\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$\sin 5\theta+\sin\theta+\sin 3\theta=0$

$2\sin\frac{5\theta+\theta}{2}\cos\frac{5\theta-\theta}{2}+\sin 3\theta=0$

$2\sin 3\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta=0$

$\sin 3\theta(2\cos 2\theta+1)=0$

$\therefore\ \sin 3\theta=0$ または $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$

$3\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ または $2\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

よって $\underline{\underline{\boldsymbol{\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi}}}$

(2) $\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta<0\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$\cos 4\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta<0$

$2\cos\frac{4\theta+2\theta}{2}\cos\frac{4\theta-2\theta}{2}+\cos 3\theta<0$

$2\cos 3\theta\cos\theta+\cos 3\theta<0$

$\cos 3\theta(2\cos\theta+1)<0$

(i) $\begin{cases}\cos 3\theta>0\\ \cos\theta<-\frac{1}{2}\end{cases}$ または (ii) $\begin{cases}\cos 3\theta<0\\ \cos\theta>-\frac{1}{2}\end{cases}$

(i) $\cos 3\theta>0\ (0\leqq 3\theta\leqq 3\pi)$ より

$0\leqq 3\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<3\theta<\frac{5}{2}\pi$

$\therefore\ 0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi\cdots\cdots$①

$\cos\theta<-\frac{1}{2}$ より $\frac{2}{3}\pi<\theta\leqq\pi\cdots\cdots$②

①,②より $\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\cos 3\theta<0\ (0\leqq 3\theta\leqq 3\pi)$ より

$\frac{\pi}{2}<3\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi<3\theta\leqq 3\pi$

$\therefore\ \frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi<\theta\leqq\pi\cdots\cdots$③

$\cos\theta>-\frac{1}{2}$ より $0\leqq\theta<\frac{2}{3}\pi\cdots\cdots$④

③,④より $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$

(i)(ii) より $\underline{\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi}}}$

30. ♣和 $\longleftrightarrow$ 積 の公式等を上手に使う

(1) $A+B+C=\pi$ より $C=\pi-(A+B)$

(左辺)$=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+\sin\{2\pi-2(A+B)\}$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)-\sin 2(A+B)$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)-2\sin(A+B)\cos(A+B)$

$=2\sin(A+B)\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin(A+B)\left\{-2\sin\frac{2A}{2}\sin\frac{-2B}{2}\right\}$

$=4\sin(A+B)\sin A\sin B$

$=4\sin(\pi-C)\sin A\sin B$

$=4\sin C\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C$ (証終)

(2) $A+B+C=\pi$ より $C=\pi-(A+B)$

(左辺)$=\sin A+\sin B+\sin C$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\{\pi-(A+B)\}$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(2\times\frac{A+B}{2}\right)$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$

$=2\sin\frac{\pi-C}{2}\left(2\cos\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (証終)